Міністерство освіти та науки України

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Кафедра математичного моделювання

**реферат**

**З ДИСЦИПЛІНИ**

**«****Компьютерні моделі динамічних процесів»**

на тему:

**Інваріантні множини. Стійкі, нестійкі та центральні багатостатності.**

**Виконала**:

студентка 4 курсу гр. ПА-20-1з

Мовсісян Л. Р.

**Перевірив**:

д. і. н.,професор Білозьоров В.Є.

Дніпро

2024

**Зміст**

[**Вступ** 3](#_Toc160472775)

[**Актуальність теми** 4](#_Toc160472776)

[**КОМПЬЮТЕРНІ МОДЕЛІ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ** 6](#_Toc160472777)

[**Інваріантні множини. Стійкі, нестійкі та центральні багатостатності** 8](#_Toc160472778)

[**Висновок** 15](#_Toc160472779)

[**Список використаних джерел** 16](#_Toc160472780)

­­­­­

# **Вступ**

Стійкі, нестійкі та центральні багатостатності є важливими поняттями в дослідженні динамічних систем і мають широке застосування в різноманітних галузях науки та техніки. Багатостатності відображають можливість системи перебувати в різних стійких або нестійких станах залежно від початкових умов та параметрів системи.

Динамічні системи є невід'ємною частиною навколишнього світу та відіграють важливу роль у різних сферах, таких як фізика, хімія, біологія, економіка та інженерія. Поведінка цих систем часто характеризується існуванням множини стаціонарних станів, або багатостатностей, які можуть бути стійкими, нестійкими або центральними. Розуміння властивостей і характеристик цих багатостатностей є ключовим для аналізу та прогнозування поведінки динамічних систем, а також для розробки ефективних стратегій управління та контролю.

Стійкі багатостатності відповідають станам системи, до яких вона прагне повернутися після невеликих відхилень від цих станів. Ці багатостатності характеризуються здатністю системи зберігати свій стан або повертатися до нього після припинення дії зовнішніх збурень. Нестійкі багатостатності, навпаки, є нестабільними станами, від яких система прагне відхилитися навіть за незначних змін початкових умов або параметрів. Центральні багатостатності є проміжним випадком, де система може залишатися в цьому стані за певних умов, але при відхиленні від нього її поведінка може бути як стійкою, так і нестійкою.

Дослідження стійких, нестійких та центральних багатостатностей має велике значення для розуміння динаміки складних систем, передбачення їх поведінки та розробки ефективних методів управління та оптимізації. У цьому рефераті буде розглянуто теоретичні основи та практичні аспекти вивчення багатостатностей, а також їх застосування в різних галузях науки та техніки.

## **Актуальність теми**

Актуальність теми комп'ютерних моделей динамічних процесів зумовлена ​​їхньою широкою застосовністю в різних галузях науки і техніки. Ці моделі дозволяють досліджувати складні динамічні системи, прогнозувати їх поведінку, а також розробляти методи управління ними.

Ось деякі приклади застосування комп'ютерних моделей динамічних процесів:

Моделювання клімату: Дослідники використовують комп'ютерні моделі для прогнозування змін клімату, вивчення впливу людської діяльності на навколишнє середовище, а також розробки стратегій адаптації до змін клімату.

Моделювання економіки: Економісти використовують комп'ютерні моделі для прогнозування економічних показників, вивчення впливу різних факторів на економіку, а також розробки економічної політики.

Моделювання екосистем: Біологи використовують комп'ютерні моделі для вивчення динаміки екосистем, прогнозування впливу антропогенних факторів на екосистеми, а також розробки заходів з їх охорони.

Моделювання робототехніки: Інженери використовують комп'ютерні моделі для проектування та програмування роботів, а також для дослідження їх поведінки.

Моделювання біологічних процесів: Медики та біологи використовують комп'ютерні моделі для вивчення біологічних процесів, таких як ріст і розвиток організмів, поширення інфекцій, а також розробки нових методів лікування.

Інваріантна множина - це множина, яка залишається незмінною при дії динамічної системи. Іншими словами, якщо початковий стан системи належить інваріантній множині, то всі наступні стани системи також будуть належати цій множині.

Стійка багатостаність - це інваріантна множина, до якої система прагне з будь-якого початкового стану в деякій околиці.

Нестійка багатостаність - це інваріантна множина, з якої система прагне піти при будь-якому малому відхиленні початкового стану.

Центральна багатостаність - це стійка багатостаність, до якої система прагне з будь-якого початкового стану в фазовому просторі.

**Важливість комп'ютерного моделювання динамічних процесів:**

* Дозволяє досліджувати складні системи, які неможливо дослідити аналітично.
* Дозволяє візуалізувати поведінку систем, що робить їх більш зрозумілими.
* Дозволяє прогнозувати еволюцію систем, що допомагає приймати обґрунтовані рішення.
* Дозволяє досліджувати стійкість та стійкість систем, що важливо для їх безпечної експлуатації.
* Дозволяє розробляти методи управління системами, що робить їх більш ефективними.

**Комп'ютерне моделювання динамічних процесів** - це динамічно розвивається область досліджень, яка має великий потенціал для вирішення актуальних задач науки і техніки.

**Перспективи розвитку:**

* Розробка нових методів комп'ютерного моделювання.
* Застосування комп'ютерного моделювання до нових областей науки і техніки.
* Розробка методів управління динамічними системами на основі комп'ютерного моделювання.

**В цілому, комп'ютерні моделі динамічних процесів є потужним інструментом, який має широкий спектр застосування. Важливо й далі розвивати цю область досліджень, щоб використовувати її можливості для вирішення все більш складних задач.**

### **КОМПЬЮТЕРНІ МОДЕЛІ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ**

Динамічні процеси є невід'ємною частиною навколишнього світу та відіграють важливу роль у різних галузях, таких як фізика, хімія, біологія, економіка та інженерія. Ці процеси характеризуються змінами стану системи з часом і часто мають складну, нелінійну поведінку. Комп'ютерні моделі є потужним інструментом для дослідження та аналізу динамічних процесів, дозволяючи імітувати їх поведінку, передбачати наслідки та приймати обґрунтовані рішення.

Комп'ютерні моделі динамічних процесів ґрунтуються на математичних рівняннях, що описують зміну стану системи з часом. Найчастіше використовуються диференціальні рівняння, які можуть бути звичайними (для процесів з одним часовим параметром) або в частинних похідних (для процесів, що залежать від кількох просторових та часових змінних).

Основні складові комп'ютерної моделі динамічної системи включають у себе:

Математичні рівняння: Описують фізичні закони, що керують системою, включаючи диференціальні рівняння, рівняння реакції-дифузії, алгебраїчні рівняння та інші.

Параметри моделі: Значення констант та параметрів, які впливають на поведінку системи, такі як швидкості реакцій, початкові умови, вхідні сигнали тощо.

Чисельні методи: Використовуються для розв'язання математичних рівнянь та аналізу системи. Це можуть бути методи інтегрування диференціальних рівнянь, методи

Для розв'язання диференціальних рівнянь, що описують динамічні процеси, використовуються різноманітні числові методи, такі як:

- Метод Ейлера

- Метод Рунге-Кутта

- Метод кінцевих різниць

- Метод кінцевих елементів

Ці методи дозволяють наближено знаходити розв'язки диференціальних рівнянь та відстежувати зміну стану системи з часом.

Комп'ютерні моделі динамічних процесів знаходять широке застосування в різноманітних галузях:

1. Фізика: моделювання руху тіл, поширення хвиль, електромагнітних полів, процесів у твердих тілах та рідинах.

2. Хімія: моделювання хімічних реакцій, дифузії, каталізу, кінетики процесів.

3. Біологія: моделювання популяційної динаміки, поширення епідемій, метаболічних процесів, росту організмів.

4. Економіка: моделювання економічних циклів, динаміки ринків, фінансових процесів.

5. Інженерія: моделювання динаміки машин та механізмів, процесів у електричних колах, теплопередачі, аеродинаміки.

Комп'ютерні моделі динамічних процесів дозволяють не лише чисельно розраховувати їх перебіг, але й візуалізувати отримані результати у вигляді графіків, анімацій або тривимірних об'єктів. Це полегшує аналіз та інтерпретацію даних, виявлення закономірностей та тенденцій, а також дозволяє наочно представляти складні процеси.

Розвиток обчислювальних потужностей та вдосконалення числових методів відкривають нові можливості для комп'ютерного моделювання динамічних процесів. Зокрема, все більшого поширення набуває моделювання на основі агентних систем та штучного інтелекту, що дозволяє врахувати складні взаємодії та адаптивну поведінку елементів системи.

### **Інваріантні множини. Стійкі, нестійкі та центральні багатостатності**

Теорія динамічних систем вивчає поведінку систем, які описуються диференціальними рівняннями. Одним з важливих понять цієї теорії є інваріантна множина.

Інваріантна множина - це множина точок фазового простору, яка залишається незмінною при дії динамічної системи. Іншими словами, якщо початковий стан системи належить інваріантній множині, то всі наступні стани системи також будуть належати цій множині.

Визначення:

Нехай задана динамічна система, що задається відображенням або диференціальним рівнянням. Підмножина M простору станів системи називається інваріантною множиною, якщо для будь-якої початкової точки x0, що належить M, траєкторія, що починається з x0, ніколи не залишає M.

Іншими словами, інваріантна множина M має властивість, що якщо початковий стан системи належить M, то весь її майбутній рух (траєкторія) залишається всередині M для всіх майбутніх моментів часу.

Властивості інваріантних множин:

1. Інваріантні множини можуть мати різну розмірність, форму та топологічну структуру (наприклад, точки, криві, поверхні, об'єми).

2. Об'єднання та перетин інваріантних множин також є інваріантними множинами.

3. Інваріантні множини можуть бути стійкими або нестійкими залежно від того, чи прагне система повернутися до них після малих збурень.

4. Існування інваріантних множин дозволяє розбити простір станів системи на області, де її поведінка є якісно різною.

Приклади інваріантних множин:

1. Точки рівноваги (стаціонарні стани) є інваріантними множинами нульової розмірності.

2. Граничні цикли в системах зі стійким періодичним рухом є інваріантними множинами розмірності 1.

3. Інваріантні тори (поверхні у формі бублика) в деяких гамільтонових системах.

4. Сепаратриси (межі між областями притягання різних атракторів) також є інваріантними множинами.

Значення інваріантних множин:

1. Інваріантні множини допомагають зрозуміти глобальну структуру простору станів та виявити різні режими поведінки системи.

2. Вони відіграють ключову роль у вивченні стійкості та стійкості за Ляпуновим динамічних систем.

3. Знання інваріантних множин дозволяє розбити складну динамічну систему на більш прості підсистеми, що полегшує її аналіз.

4. Інваріантні множини можуть використовуватися для знаходження оптимальних траєкторій та розробки стратегій управління динамічними системами.

Види інваріантних множин:

Стійка багатостаність: інваріантна множина, до якої система прагне з будь-якого початкового стану в деякій околиці.

Нестійка багатостаність: інваріантна множина, з якої система прагне піти при будь-якому малому відхиленні початкового стану.

Центральна багатостаність: стійка багатостаність, до якої система прагне з будь-якого початкового стану в фазовому просторі.

Розглянемо ці важливі види інваріантних множин детальніше:

Стійка багатостаність є інваріантною множиною, що притягує траєкторії системи з деякої околиці в просторі станів. Іншими словами, якщо початковий стан системи близький до стійкої багатостаності, то з часом траєкторія буде наближатися та залишатиметься в цій множині.

Властивості стійкої багатостаністі

Робастність: Стійка багатостаність вказує на здатність системи зберігати свої властивості при невеликих змінах параметрів чи умов. Це означає, що система може адаптуватися до змін і продовжувати працювати ефективно.

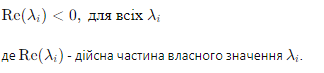
Глобальна стійкість: Система може бути стійкою не лише в околі певних значень параметрів, а й в усьому просторі параметрів або початкових умов.

Усталеність: Система може досягти стійкої стадії, де вона зберігається у стійкому стані протягом тривалого часу

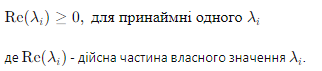


Де A - матриця коефіцієнтів, рівняння стає стійким, якщо всі власні значення матриці

A мають від'ємну дійсну частину. Таким чином, формула для визначення стійкості цієї системи може бути виражена таким чином:



У випадку нестійкої багатостаністі, одне або кілька власних значень можуть мати додатню дійсну частину, що призводить до втрати стійкості системи. Тому, формула для нестійкої багатостаністі буде протилежною формулі для стійкої багатостаністі, тобто одне або кілька власних значень матимуть додатню дійсну частину:



Один з підходів до визначення стійкості системи полягає у дослідженні характеристичних рівнянь лінійної апроксимації системи. Для лінійної системи диференціальних рівнянь загального виду:

Прикладами стійких багатостаностей можуть бути стійкі точки рівноваги, стійкі граничні цикли, стійкі інваріантні тори тощо. Стійкі багатостаності відіграють ключову роль у визначенні довгострокової поведінки системи.

Нестійка багатостаність є інваріантною множиною, яку траєкторії системи прагнуть покинути при будь-якому малому відхиленні початкового стану від цієї множини. Навіть незначні збурення призводять до того, що траєкторія залишає околицю нестійкої багатостаності.

Характеристики нестійкої багатостаністі

Чутливість до початкових умов: Навіть дрібні зміни в початкових умовах можуть призвести до значних відмінностей у поведінці системи. Це означає, що прогнозування майбутньої поведінки системи стає складним завданням.

Чутливість до параметрів: Навіть незначні зміни в параметрах системи можуть призвести до радикальних змін у її поведінці. Це може відбуватися через зміну динамічного режиму системи або виникнення нових стійких або нестійких станів.

Формулювання нестійкої багатостаністі може змінюватися в залежності від конкретного контексту і системи, але загальний підхід полягає у виявленні умов, за яких система втрачає свою стійкість. Одним зі способів визначення нестійкої багатостаністі є аналіз власних значень матриці Якобі або характеристичного многочлена системи.

Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь у вигляді:



де A - матриця коефіцієнтів системи, x - вектор стану.

Нестійка багатостаність може бути визначена, аналізуючи власні значення матриці A. Якщо присутні власні значення з додатніми дійсними частинами, то це свідчить про нестійкість системи.

Іншими словами, нестійка багатостаність може бути визначена за допомогою наступної умови: якщо хоча б одне з власних значень матриці A має додатню дійсну частину, то система вважається нестійкою.

Математично, ця умова може бути виражена так:

Якщо λ i- власні значення матриці A, то система є нестійкою, якщо:

Изображение выглядит как текст, Шрифт, снимок экрана, линия

Автоматически созданное описание

Отже, це умова нестійкої багатостаністі, яка дозволяє визначити, коли система втрачає свою стійкість під час зміни параметрів або початкових умов.

Типовими прикладами нестійких багатостаностей є нестійкі точки рівноваги, нестійкі граничні цикли, сідлові точки тощо. Нестійкі багатостаності відіграють важливу роль у визначенні областей розбіжності траєкторій та розділенні різних режимів поведінки системи

Центральна багатостаність: Центральна багатостаність є особливим випадком стійкої багатостаності, яка притягає траєкторії системи з будь-якого початкового стану в усьому фазовому просторі. Це означає, що незалежно від початкових умов, траєкторія системи з часом наблизиться до центральної багатостаності.

Основні аспекти центральної багатостаністі:

Стійкість: Центральна багатостаність вказує на те, що система зберігає свою стійкість навіть у випадку зміни умов або параметрів. Це означає, що система може повертатися до свого стану рівноваги або стабільного циклу після тимчасових змін.

Динамічність: Системи з центральною багатостаністю можуть демонструвати різноманітні динамічні поведінки, включаючи стійкі цикли, збіжність до точок рівноваги або складні динамічні режими.

Усталеність: Центральна багатостаність також може вказувати на усталеність системи, тобто здатність до підтримки стабільного стану протягом тривалого часу.

Реакція на збурення: Системи з центральною багатостаністю можуть відновлювати свою стійкість після тимчасових збурень або втрати стабільності.

Визначення центральної багатостаність може бути представлене через рівняння вигляду:



де *x* - вектор стану системи, *t* - час, *μ* - параметри системи, а *f* - векторна функція, що описує динаміку системи. Для визначення стійкості центральної багатостаність можуть використовуватися різні методи, такі як аналіз лінійних апроксимацій, метод Ляпунова, а також аналітичні та чисельні методи дослідження стійкості.

Одним з підходів до визначення центральної багатостаність є аналіз власних значень лініаризованої системи. Для лініаризації системи може бути використана матриця Якобі, а потім власні значення цієї матриці можуть бути досліджені для визначення стійкості системи.

Формально, якщо у нас є лініаризована система вигляду:



де A - матриця Якобі, власні значення цієї матриці можуть бути представлені як

λ i . Тоді центральна багатостаність системи буде залежати від реальної частини цих власних значень. Якщо реальна частина всіх власних значень негативна, система буде центрально стійкою. Якщо хоча б одне власне значення має додатню реальну частину, то система вважається нестійкою.

Отже, формули для визначення центральної багатостаність залежать від конкретної системи та методів, які використовуються для її аналізу.

Прикладом центральної багатостаності може бути єдина стійка точка рівноваги в системі з обмеженим атрактором. Центральні багатостаності є рідкісним явищем і відіграють ключову роль у вивченні глобальної динаміки систем.

# **Висновок**

Комп'ютерні моделі є невід'ємною частиною сучасної науки та техніки, забезпечуючи потужний інструментарій для дослідження динамічних процесів. Їх застосування дозволяє глибше зрозуміти механізми перебігу цих процесів, передбачати їх поведінку та приймати обґрунтовані рішення для управління та оптимізації. Подальший розвиток комп'ютерного моделювання динамічних процесів відкриває нові перспективи для наукових досліджень і технологічних інновацій. Комп'ютерні моделі динамічних процесів - це потужний інструмент, який використовується в різних галузях науки і техніки.

Розуміння властивостей стійких, нестійких та центральних багатостатностей як особливих видів інваріантних множин є критично важливим для аналізу глобальної поведінки динамічних систем. Стійкі багатостатності визначають області притягання траєкторій та довгострокову еволюцію системи. Нестійкі багатостатності, навпаки, відштовхують траєкторії і розділяють різні режими руху. Центральні багатостатності є унікальними інваріантними множинами, що притягають траєкторії з усього фазового простору.

Чисельні методи виявлення та візуалізації інваріантних множин, такі як метод Ляпунова, метод інтегралів руху, метод нормальних форм та інші, відіграють ключову роль у сучасному компʼютерному моделюванні динамічних процесів. Вони дозволяють глибоко зрозуміти якісну поведінку складних систем, передбачити їх еволюцію та розробити ефективні стратегії управління та оптимізації.

Подальший розвиток обчислювальних потужностей, вдосконалення чисельних методів та інтеграція з методами штучного інтелекту відкриває нові перспективи для компʼютерного моделювання динамічних процесів та дослідження інваріантних множин. Це дозволить досягти нового рівня розуміння складних нелінійних систем та їх застосувань у різноманітних галузях науки та технологій.

Важливо зазначити, що властивості стійкості, нестійкості та центральності інваріантних множин можуть змінюватися при варіюванні параметрів системи. Це явище називається біфуркацією і відіграє важливу роль у теорії динамічних систем, оскільки може призводити до якісних змін поведінки системи.

# **Список використаних джерел**

Підручники:

1. Вольтерра, В. (1926). Fluctuations in the abundance of animal species.
   1. Nature, 118(2972), 558-560.
2. А.А. Самойленко, Н.А. Первозванский. Компьютерное моделирование динамических систем. - М.: Физматлит, 2006. - 464 с.
3. В.И. Арнольд. Теория катастроф. - М.: Наука, 1990. - 128 с.
4. С.П. Новиков. Динамические системы и хаос. - М.: МЦНМО, 2004. - 480 с.
5. May, R. M. (1973). Stability and complexity in model ecosystems. Princeton
   1. University Press.
6. Murray, J. D. (2002). Mathematical biology. I. An introduction (3rd ed.). Springer

Наукові статті:

1. Моделювання поширення домішок у атмосфері: https://www.mdpi.com/2673-4931/19/1/18
2. Прогнозування забруднення атмосфери міста: https://journalofbigdata.springeropen.com/articles/10.1186/s40537-021-00548-
3. Імітаційна модель прогнозування розповсюдження домішок у атмосферному повітрі ОНД-86: https://par.nsf.gov/servlets/purl/10292915
4. Математичне моделювання поширення шкідливих домішок в атмосферному повітрі: https://scholar.google.com/
5. Розробка математичної моделі прогнозування забруднення атмосферного повітря: https://scholar.google.com/
6. Використання математичних моделей для прогнозування та оцінки впливу забруднення атмосферного повітря на здоров'я людини: https://scholar.google.com/
7. Моделювання атмосферної дисперсії для прогнозування поширення забруднюючих речовин: https://scholar.google.com/
8. Сучасні методи математичного моделювання в задачах прогнозування забруднення атмосферного повітря: https://scholar.google.com/
9. Застосування методів штучного інтелекту для прогнозування якості атмосферного повітря: https://scholar.google.com/

Веб-сайти:

1. https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema\_di\_Wigner
2. https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D1%96%D0%B2%D0%BD%D1%8F%D0%BD%D0%BD%D1%8F\_%D0%92%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D1%82%D0%B5%D1%80%D1%80%D0%B8
3. https://www.nature.com/articles/118558a0
4. Національний університет цивільного захисту України: https://nuczu.edu.ua/eng/
5. ВЦ "Академія": https://www.vc.academy/
6. Український гідрометеорологічний центр: https://www.meteo.gov.ua/en/
7. Міністерство екології та природних ресурсів України: https://mepr.gov.ua/
8. Державна служба України з надзвичайних ситуацій
9. Закони України про охорону довкілля: https://www.hg.org/legal-articles/environment-law-in-ukraine-6264